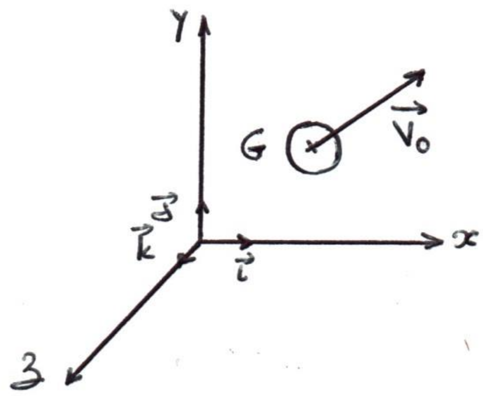
Chapitre n°2 : Application des lois de Newton et des lois de Kepler

I. Mouvement d'un système dans un champ de pesanteur - électrique

1. Cas d'un objet dans un champ de pesanteur uniforme

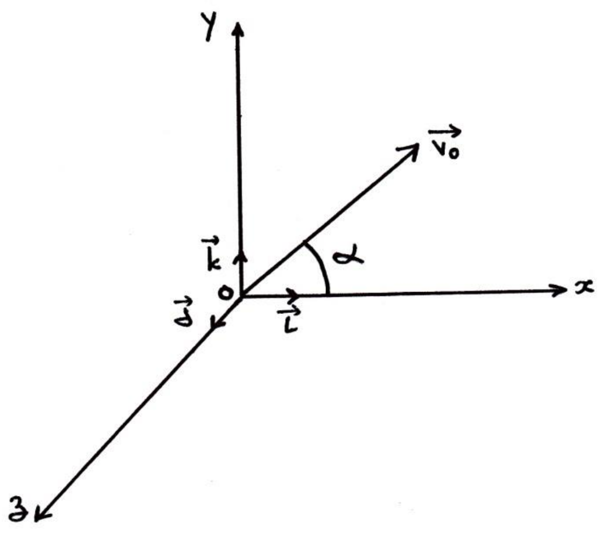


- Système : la balle ;
- Référentiel : terrestre assimilé galiléen.

$\vec{v_0}$ appartient au plan (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

- Forces extérieures : le poids $\vec{P}$; les forces exercées par l'air sur la balle $\overrightarrow{F_{air/balle}}$.

On néglige ces dernières forces car P >> F (on néglige les frottements).
On se trouve dans le cas d'une chute libre.



- Deuxième loi de Newton :

$\sum \vec{F}_{\text{extérieures}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

La masse est constante : $\vec{p}$ = m.$\vec{v}$ donc $\sum \vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt}$

$\sum \vec{F}$ =m $\frac{d\vec{v}}{dt}$ soit $\sum \vec{F}$ =m.$\vec{a}$

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P}$ = m$\vec{g}$

m$\vec{g}$ = m$\vec{a}$ soit $\vec{a} = \vec{g}$

1°) Accélération

$$\vec{g}\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = -g \\ g_z = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases}$$

On considère que le champ de pesanteur est uniforme $\vec{g} = \overrightarrow{cste}$.

2°) Vitesse

On intègre l'accélération sur $[0, t]$ pour avoir la vitesse soit v(t) = $\int_0^t a(t)dt$.

$\vec{v}\begin{cases} v_x = K_1 \\ v_y = -gt + K_2 \\ v_z = K_3 \end{cases}$ avec (K_1, K_2, K_3) ϵ (cste)^3, ce sont des constantes d'intégration.

Remarque : $v_y = \int_0^t a_y dt = \int_0^t -g.dt = [-gt]_0^t$ = -gt – 0 = -gt.

On trouve les 3 constantes en se plaçant aux conditions initiales, soit à t=0.
Les 3 constantes correspondent à des vitesses (elles sont dans les coordonnées de $\vec{v}$, ainsi on les trouve en projetant la vitesse à t=0, c'est-à-dire en projetant sur les axes le vecteur $\overrightarrow{v_0}$).

t=0 : $\overrightarrow{v_0}\begin{cases} v_{0x} = v_x(t=0) = K_1 \\ v_{0y} = v_y(t=0) = K_2 \\ v_{0z} = v_z(t=0) = K_3 \end{cases}$ et $\overrightarrow{v_0}\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \\ v_{0z} = 0 \end{cases}$

par identification : $\begin{cases} K_1 = v_0.cos\alpha \\ K_2 = v_0.\sin\alpha \\ K_3 = 0 \end{cases}$

finalement : $\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = v_0.\cos\alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0.\sin\alpha \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$

3°) Position $\overrightarrow{OG}$

Il faut rechercher une primitive par rapport au temps de chaque coordonnée du vecteur vitesse.

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = \int_0^t v_x(t)dt \\ y(t) = \int_0^t v_y(t)dt \\ z(t) = \int_0^t v_z(t)dt \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = v_0.\cos\alpha t + K_1' \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0.\sin\alpha t + K_2' \\ z(t) = K_3' \end{cases}$$

Les constantes K_i' s'obtiennent en se plaçant aux conditions initiales (t=0) et en exprimant la position de G à ce moment-là.

t=0 : $\overrightarrow{OG_0}\begin{cases} x_0 = K_1' = 0 \\ y_0 = K_2' = 0 \\ z_0 = K_3' = 0 \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = v_0.\cos\alpha t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0.\sin\alpha t \\ z(t) = 0 \end{cases}$

x(t), y(t(et z(t) sont les équations horaires du mouvement.
z(t) = 0 ce qui indique que la trajectoire est plane.

4°) Equation de la trajectoire y(x)

Cette équation rend compte de l'allure mathématique de la trajectoire (parabolique, linéaire etc…).
Il faut effectuer le changement de variable t → x
de l'équation horaire x(t) = v_0.cos αt on écrit t = $\frac{x}{v_0.cos\alpha}$
Par substitution on écrit : y(x) = - $\frac{1}{2}.g.\frac{x^2}{{v_0}^2.cos^2\alpha}$ + v_0.sin α.$\frac{x}{v_0.cos\alpha}$
soit l'équation de la trajectoire : y(x) = - $\frac{1}{2}.g.\frac{x^2}{{v_0}^2.cos^2\alpha}$ + tan α.x
Cette équation traduit un arc de parabole.